Paralelismo e perpendicularidade. Sistemas de equações.

Paralelismo e perpendicularidade de retas

No espaço, duas retas **r** e **s** são paralelas se e só se os seus vetores diretores são colineares:

$$\boxed{r /\!/ s \quad \Leftrightarrow \vec{r} \text{ é colinear com } \vec{s}}$$

Exemplo:

Sejam as retas **r** e **s** definidas por:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-6} \quad \wedge \quad z=5$$

$$s: \ (x,y,z) = (1,2,3) + k(-1,2,0), k \in \mathbb{R}$$

Os vetores $\vec{r} = (3,-6,0)$ e $\vec{s} = (-1,2,0)$ são vetores diretores das retas **r** e **s**, respetivamente.

Vejamos agora se a reta **r** é paralela à reta **s** através da colinearidade dos seus vetores diretores, ou seja, se existe um k real, tal que:

$$\vec{r} = k\,\vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad (3,-6,0) = k(-1,2,0) \quad \Leftrightarrow \quad (3,-6,0) = (-k,2k,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3=-k \\ -6=2k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k=-3 \\ k=-3 \end{cases}$$

Donde se conclui que os vetores são colineares, ou seja, $\vec{r} = -3\,\vec{s}$. Então as retas r e s são paralelas.

Paralelismo e perpendicularidade de retas

No espaço, duas retas **r** e **s** são perpendiculares se e só se os seus vetores diretores são perpendiculares:

$$\boxed{r \perp s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} \perp \vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}\,.\,\vec{s} = 0}$$

Exemplo:

Sejam as retas **s** e **t** definidas por:

$$s: \ (x,y,z) = (1,2,3) + k(-1,2,0), k \in \mathbb{R}$$

$$t: \ \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{2}$$

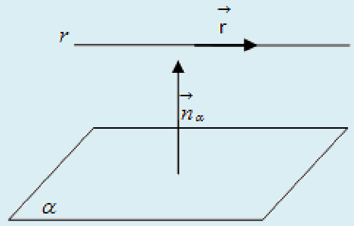
Os vetores $\vec{s} = (-1,2,0)$ e $\vec{t} = (2,1,2)$ são vetores diretores das retas **s** e **t,** respetivamente. Se observarmos com atenção as coordenadas dos vetores $\vec{s}$ e $\vec{t}$, podemos verificar que $\vec{s}\,.\,\vec{t} = 0$. Então os vetores $\vec{s}$ e $\vec{t}$ são perpendiculares, sendo as retas **s** e **t** também perpendiculares.

Verificação: $\vec{s}\,.\,\vec{t} = (-1,2,0).(2,1,2) = -1\times 2 + 2\times 1 + 0\times 2 = -2+2+0 = 0$ c.q.p.

Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos

No espaço, uma <u>reta **r** é paralela a um plano **α**</u> , se e só se um seu vetor diretor $\vec{r}$ é perpendicular a um vetor $\vec{n}_\alpha$, normal ao plano α:

$$\boxed{r \,//\, \alpha \;\Leftrightarrow\; \vec{r} \perp \vec{n}_\alpha \;\Leftrightarrow\; \vec{r} \,.\, \vec{n}_\alpha = 0}$$



Exemplo:

Consideremos a reta $r: \dfrac{x+5}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{4}$ e o plano $\alpha: \; 6x + y + z + 4 = 0$

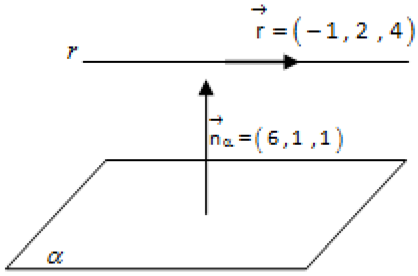
O vetor $\vec{n}_\alpha = (6, 1, 1)$ é um vetor perpendicular ou normal ao plano dado.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (-1,2,4)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$ pois

$$\vec{r} \,.\, \vec{n}_\alpha = (-1,2,4) \,.\, (6,1,1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

Isto é, $\vec{r} \,.\, \vec{n}_\alpha = 0$.

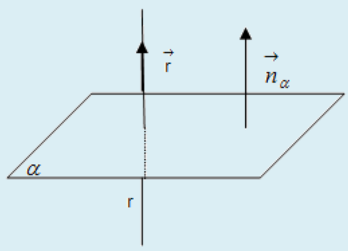
Podemos então concluir que a reta r é paralela ao plano dado.



Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos

No espaço, uma <u>reta **r** é perpendicular a um plano **α**</u> , se e só se um seu vetor diretor $\vec{r}$ é colinear com um vetor $\vec{n}_\alpha$, normal ao plano α:

$$\boxed{r \perp \alpha \;\Leftrightarrow\; \vec{r} \text{ é colinear com } \vec{n}_\alpha}$$



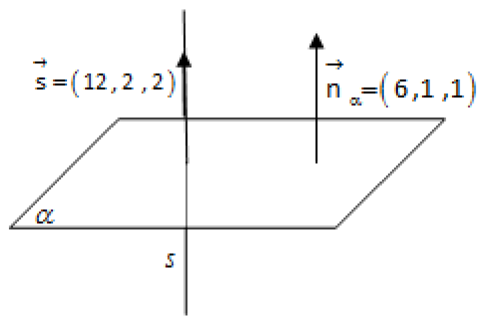
Exemplo:

Consideremos a reta $s: \; (x, y, z) = (1, 5, -2) + k\,(12, 2, 2),\; k \in \mathbb{R}$ e o plano $\alpha: \; 6x + y + z + 4 = 0$

O vetor diretor da reta **s** é $\vec{s} = (12, 2, 2)$ e o vetor normal do plano **α** é $\vec{n}_\alpha = (6, 1, 1)$

Verifica-se que $\vec{s} = 2\vec{n}_\alpha$, logo os vetores são colineares.

Portanto a reta **s** é perpendicular ao plano **α**.



Paralelismo e perpendicularidade de planos

Dois planos, α e β, são **paralelos** se e só se os seus respectivos vetores normais, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$, são paralelos, isto é:

$$\alpha /\!/ \beta \iff \vec{n}_\alpha \text{ é colinear com } \vec{n}_\beta$$

Exemplo:

Consideremos os planos:

$$\alpha : 2x - y + z + 3 = 0$$

e $$\beta : -4x + 2y - 2z - 7 = 0$$

Um vetor normal ao plano α, $\vec{n}_\alpha = (2,-1,1)$ é colinear com um vetor normal ao plano β, $\vec{n}_\beta = (-4,2,-2)$, pois

$\vec{n}_\beta = -2\vec{n}_\alpha$.

Donde se conclui que os planos são paralelos entre si.

Paralelismo e perpendicularidade de planos

Dois planos, β e π, são **perpendiculares** se e só se os seus respectivos vetores normais, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$, são perpendiculares, isto é:

$$\beta \perp \pi \iff \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\pi \iff \vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

Exemplo:

Consideremos os planos:

$$\beta : -4x + 2y - 2z - 7 = 0$$

e $$\pi : x + 2y - 10 = 0$$

Um vetor normal ao plano β, $\vec{n}_\beta = (-4,2,-2)$ é perpendicular ao vetor normal ao plano π, $\vec{n}_\pi = (1,2,0)$, pois:

$$\vec{n}_\beta \cdot \vec{n}_\pi = (-4,2,-2) \cdot (1,2,0) = -4 + 4 + 0 = 0$$

Logo, os planos β e π são perpendiculares.

Intersecção de dois planos

Uma reta pode ser definida como a intersecção de dois planos concorrentes.

Exercício: Determina as coordenadas de um ponto e de um vetor director da reta:

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-z \\ x-(-2x-z)-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-z \\ 3x-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-(3x-2) \\ z=3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=-5x \\ z+2=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y-2}{-5}=x \\ \dfrac{z+2}{3}=x \end{cases}$$

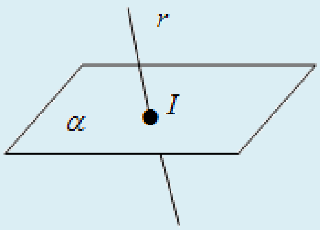
A conjunção das duas equações permite concluir que: $x=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+2}{3}$

Logo, $R(0,2,-2)$ é um ponto de **r** e $\vec{r}=(1,-5,3)$ é um vetor director da mesma reta .

Intersecção de uma reta com um plano

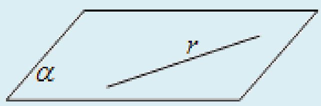
A intersecção de uma reta **r** com um plano $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser :

- Um ponto **I** , se **r** é concorrente com $\boldsymbol{\alpha}$;
- A reta **r** , se **r** está contida no plano;
- O conjunto vazio, se **r** é estritamente paralela a $\boldsymbol{\alpha}$.



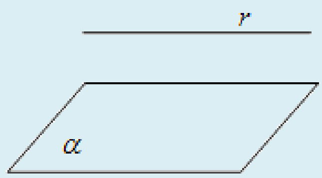
A reta **r** é concorrente com o plano $\boldsymbol{\alpha}$

$r \cap \alpha = \{I\}$



A reta **r** está contida no plano $\boldsymbol{\alpha}$

$r \cap \alpha = r$



A reta **r** é paralela ao plano $\boldsymbol{\alpha}$

$r \cap \alpha = \{\ \}$

Determinar a intersecção de uma reta com um plano

Exemplo: Determina a intersecção da reta $r:\ \dfrac{2-x}{2}=y-3=z$ com o plano $\alpha:\ 2x-4y+z-6=0$.

Modo de proceder:

1. Determina-se um ponto da reta e um vetor director da mesma;

   Ponto da reta: $A(2,3,0)$; vetor director da reta: $\vec{r}=(-2,1,1)$

2. Escreve-se a equação vetorial da reta: $(x,y,z)=(2,3,0)+k(-2,1,1),\ k\in\mathbb{R}$

3. Escreve-se a reta na forma: $\begin{cases} x=2-2k \\ y=3+k \\ z=k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$

4. O **ponto genérico** da reta r é: $R(2-2k,3+k,k)$

5. Determinar a intersecção de **r** com α é determinar k de forma que R pertença a α, ou seja, substitui-se as coordenadas de R na equação de α:

$$2x-4y+z-6=0 \Leftrightarrow 2(2-2k)-4(3+k)+k-6=0 \Leftrightarrow 4-4k-12-4k+k-6=0$$
$$\Leftrightarrow -7k-14=0 \Leftrightarrow k=-2$$

6. O ponto de intersecção obtém-se substituindo o valor de k em R: $I\left(2-2\times(-2),3+(-2),-2\right)$

O ponto de intersecção I é $\left(6,1,-2\right)$.

Exercícios Propostos:

1. Determina a intersecção da reta r com o plano α, sendo :

a) $r: \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{x+1}{3}=z$ e $\alpha: x+y-2z=3$ **(6,-7,-2)**

b) $r: x=y=\dfrac{z+1}{3}$ e $\alpha: 3x-2y+z=3$ **(1,1,2)**

c) $r: (x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(-1,1,2), \lambda\in\mathbb{R}$ e $\alpha: 5x-3y+2z=1$ **(-1,2,6)**

Intersecção de três planos

A intersecção de três planos obtém-se resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$$

pelo método da substituição ou pelo método da adição ordenada.

- Quando o sistema é possível determinado, a intersecção dos três planos é um ponto;
- Quando o sistema é possível e indeterminado, a intersecção dos três planos é uma reta ou um plano;
- Quando o sistema é impossível, a intersecção é o conjunto vazio.

Resolução de sistemas de três equações com três incógnitas

Método de substituição:

Exemplo: Resolve o sistema $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ usando o método de substituição.

Resolução: $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y-2z \\ 2(9-y-2z)+4y-3z=1 \\ 3(9-y-2z)+6y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y-2z \\ 18-2y-4z+4y-3z=1 \\ 27-3y-6z+6y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=9-y-2z \\ 2y-7z=-17 \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y-2z \\ y=\dfrac{-17+7z}{2} \\ 3\times\dfrac{-17+7z}{2}-11z=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-y-2z \\ y=\dfrac{-17+7\times3}{2} \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9-2-2\times3 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

Logo a solução é o ponto $A(1,2,3)$.

Método da Adição Ordenada:

Exemplo: Resolve o sistema $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x-y+4z=2 \\ 5x+y-z=-3 \end{cases}$ pelo método da adição ordenada.

Resolução:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x-y+4z=2 \\ 5x+y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+z=1 \\ 7x+3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+z=1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -1+z=1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2y-3\times2=1 \\ z=2 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Logo o terno ordenado $(-1,4,2)$ é solução do sistema

Cálculos auxiliares na resolução do sistema pelo método da adição ordenada:

1. Adição da 1ª equação com o dobro da 2ª equação: $E_1 + 2E_2 \rightarrow$ objetivo: eliminar o y.

$$\begin{array}{l} x+2y-3z=1 \\ \underline{4x-2y+8z=4} \\ 5x \qquad +5z=5 \Leftrightarrow x+z=1 \end{array}$$

2. Adição da 2ª equação com a 3ª equação: $E_2 + E_3 \rightarrow$ objetivo: eliminar o y.

$$\begin{array}{l} 2x-y+4z=2 \\ \underline{5x+y-z=-3} \\ 7x \qquad +3z=-1 \end{array}$$

3. Para eliminar o *z*, multiplica-se uma das equações por (-3)

Designemos por E_4 e E_5 as equações obtidas. Assim, $-3E_4+E_5$

$$\begin{array}{l} -3x-3z=-3 \\ \underline{7x+3z=-1} \\ 4x \qquad =-4 \Leftrightarrow x=-1 \end{array}$$

Exercícios Propostos:

2. Resolve cada um dos seguintes sistemas:

2.1. $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ x+y+2z=4 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ (2,4,-1)

2.2. $\begin{cases} x+2y-z=-6 \\ 3x+y+z=4 \\ x-3y-2z=1 \end{cases}$ (1,-2,3)

3. Determina a intersecção da reta $r: \ (x, y, z) = (-1, 2, 0) + k\,(2, -3, 1), k \in \mathbb{R}$ com o plano $\alpha: \ 2x + y - 2z = 6$.

(-11, 16, -6)

4. Determina as coordenadas do ponto de intersecção da reta $r: \ \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$ com o plano $\alpha: 2x + y - 2z = 1$.

(7, 3, 8)

5. Seja α o plano de equação $x + 2y + 3z = 6$.

5.1. Determina as coordenadas dos pontos de intersecção do plano α com os eixos coordenados.

(6, 0, 0); (0, 3, 0); (0, 0, 2)

5.2. Escreve uma equação vetorial da reta *s* que passa no ponto $A(2,0,0)$ e é perpendicular ao plano α.

$((x, y, z) = (2, 0, 0) + k(1, 2, 3), k \in \mathbb{R}$

6. Sejam α e β os planos definidos por $\alpha: \ 2x + 3z = 1$ e $\beta: x - 2y + z = 0$.

6.1. Mostra que os pontos $A(-1,0,1)$ e $B(5,1,-3)$ pertencem aos planos α e β.

6.2. Escreve uma equação vetorial da reta intersecção dos planos α e β.

$(x,y,z) = (-1,0,1) + k(6,1,-4), k \in \mathbb{R}$

<u>Questões Múltiplas</u>

---

1. Considera a reta **r** de equação $(x, y, z) = (-1, 0, 2) + k\,(-1, m, 2), k \in \mathbb{R}$ e o plano $\boldsymbol{\alpha}$ definido por $2x - y + 2z = 3$. A reta **r** é paralela ao plano $\boldsymbol{\alpha}$ para que valor de m?

(A) $m = 2$ **(B)** $m = 1$ **(C)** $m = -2$ **(D)** qualquer

---

2. Num referencial o.n. Oxyz, considera o plano $\boldsymbol{\alpha}$ de equação $x + y = 4$.

O plano $\boldsymbol{\alpha}$ é:

(A) paralelo ao plano xOy **(B)** perpendicular ao plano xOy

(C) paralelo ao eixo Ox **(D)** perpendicular ao eixo Ox.

---

3. Num referencial o.n. Oxyz, o ponto de intersecção da reta $r: \ \frac{x-1}{-2} = 2 - y = \frac{z+1}{3}$ com o plano xOz tem as coordenadas:

(A) $(1, 0, 5)$ **(B)** $(-3, 0, 1)$ **(C)** $(-3, 0, 5)$ **(D)** $(-3, 2, 5)$

---

4. Num referencial o.n. Oxyz, considera a reta $r: \ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$ e o plano $\alpha: \ 2x + 3y + z = 0$.

A posição da reta **r** relativamente ao plano $\boldsymbol{\alpha}$ é:

(A) **r** está contida em $\boldsymbol{\alpha}$ **(B)** **r** é paralela a $\boldsymbol{\alpha}$

(C) **r** é secante não perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}$ **(D)** **r** é perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}$

---

5. Num referencial o.n. Oxyz, as retas **AB** e **r** são paralelas.

- O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(-2, m, 3)$
- A reta r é definida pela condição $\frac{x-1}{2} = y = -\frac{z}{3}$

O valor de m é:

(A) -1 **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** 0 **(D)** 1

Questão	1	2	3	4	5
Resposta	A	B	C	D	A